Муниципальное бюджетное образовательное учреждение средней общеобразовательной школы № 2

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ИТОГОВЫЙ ПРОЕКТ
НА ТЕМУ

«Геометрия на клетчатой бумаге. Вычисление площади многоугольника»

Выполнил:
Овчинников Александр Алексеевич,
ученик 9 класса
МБОУ СОШ №2
Руководитель проекта:
Деева Марина Валерьевна,
учитель математики
МБОУ СОШ №2
(первая категория)

село Южаково
2020 год

Содержание

Введение

«Решение задач – практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь»

Д. Пойя

Увлечение математикой часто начинается с размышления над какой-то задачей. Так при изучении темы «Площади многоугольников» встречаются задачи на нахождение площади многоугольника на клетчатой бумаге. Возникли вопросы: в чём заключается особенность таких задач, существуют ли специальные методы и приёмы решения задач на клетчатой бумаге.

Актуальность: при решении задач по геометрии часто встречаются задачи, где нужно вычислить площадь фигур. Если фигура сложная, то её площадь находить довольно долго. Выбор темы проекта не случаен. Способы нахождения площади многоугольника нарисованного на клетчатой бумаге очень интересная тема. Я знаю разные способы выполнения таких заданий: способ достраивания, способ разбиения и др.

Увидев такие задачи в контрольно – измерительных материалах ОГЭ и ЕГЭ, я решил исследовать задачи на клетчатой бумаге, связанные с нахождением площади изображённой фигуры. Решения таких задач оригинальны, красивы и часто решаются проще и быстрее, чем аналитическим путем. Казалось бы, что увлекательного можно найти на клетчатой плоскости, то есть, на бесконечном листке бумаги, расчерченном на одинаковые квадратики? Оказывается, задачи, связанные с бумагой в клеточку, достаточно разнообразны.

Для многих задач на бумаге в клетку нет общего правила решения, конкретных способов и приёмов. Вот это их свойство обуславливает их ценность для развития не конкретного учебного умения или навыка, а вообще умения думать, размышлять, анализировать, искать аналогии, то есть, эти задачи развивают мыслительные навыки в самом широком их понимании.

Объект: фигуры на клетчатой бумаге.

Предмет: площади многоугольников.

Гипотеза: существует наиболее рациональный способ нахождения площадей многоугольников на клетчатой бумаге.

Цель: найти рациональный способ нахождения площадей многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге.

Задачи:

- изучить литературу по теме исследования
- найти различные способы решения задач на вычисление площади многоугольников
- научиться находить площади многоугольников на клетчатой бумаге различными способами
- проанализировать и систематизировать полученную информацию
- создать электронную презентацию работы для представления собранного материала

Методы:

1. Системный анализ
2. Обобщение
3. Сравнение
4. Поиск

1. Основная часть

1.1.Способы нахождения площадей многоугольников

- нахождение площади многоугольника подсчетом количества клеток

-нахождение площади многоугольника по формуле

- нахождение площади многоугольника разбиением

- нахождение площади многоугольника достроением

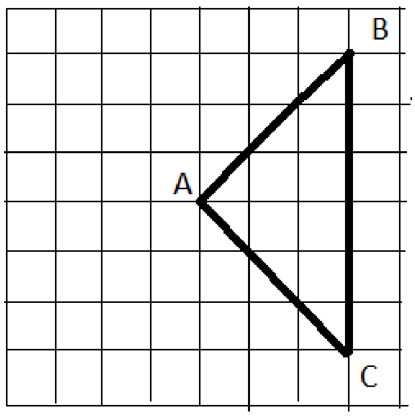
- нахождение площади многоугольника по формуле Пика.

Нахождение площади многоугольника подсчетом клеток

Если фигура состоит из полных клеток или из половинок, можно найти площадь фигуры подсчетом количества клеток, приняв во внимание, что

1клетка = 1 кв.ед., а 0,5 клетки = 0,5 кв.ед.

Задача 1. На клетчатой бумаге с размерами клеток 1смх1см изображен треугольник. Найти его площадь(в кв.см)



Решение: полных клеток-6

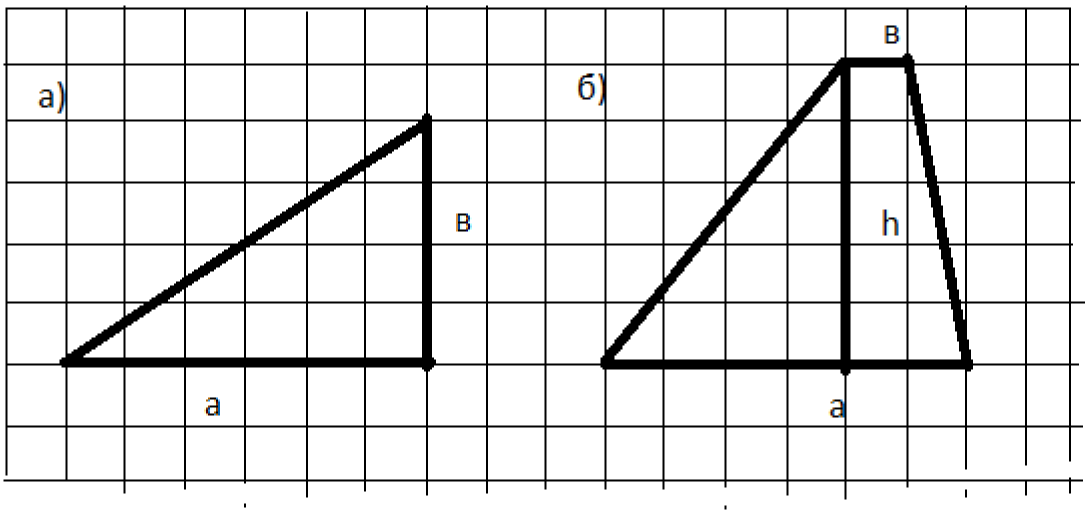
половинок клеток-6

S=6·1+6·0,5=9 кв.см

Ответ: 9

Нахождение площади многоугольника по формуле

Задача 2. Найти площадь фигур изображенных на рис.



Решение:

а) $S_{\text{пр тр}}=\frac{а\cdot в}{2}=\frac{6\cdot 4}{2}$ =12 кв.см

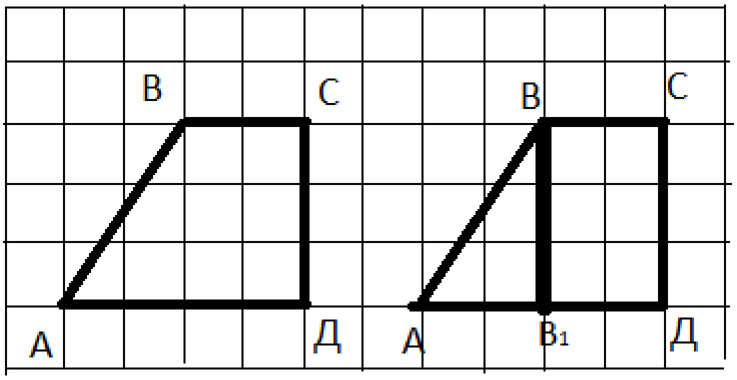
в) $S_{\text{тр}}=\frac{а\cdot в}{2\cdot h}=\frac{6\cdot 1}{2\cdot 5}$ =17,5 кв.см

Ответ: 12; 17,5

Нахождение площади многоугольника разбиением

Чтобы найти площадь многоугольника надо разбить его на части, площадь которых мы можем найти по известным нам формулам.

Задача 3. Найти площадь трапеции.



Решение:

Разобьем трапецию на две части как на рисунке. Тогда площадь трапеции равна сумме площади прямоугольника и прямоугольного треугольника.

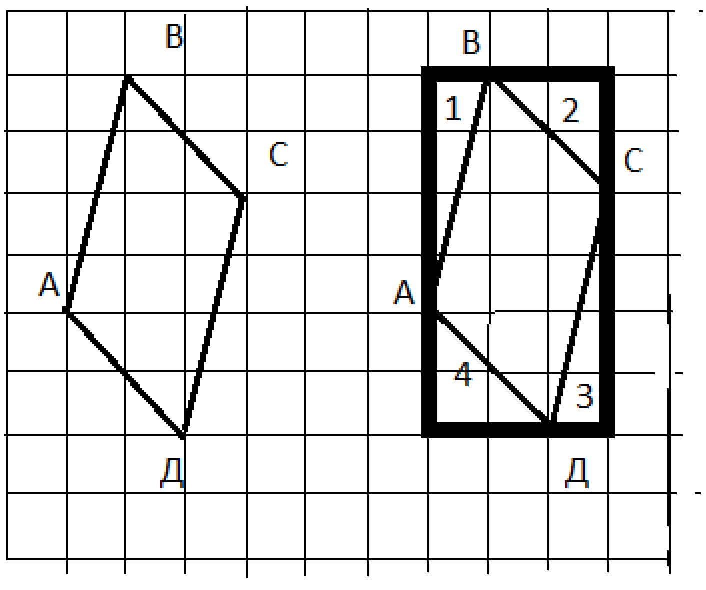
$S_{тр}=S_{пр}+S_{пр.тр}=2\cdot3=\frac{2\cdot2}{2}=9$ кв.ед

Ответ: 9

Нахождение площади многоугольника достроением

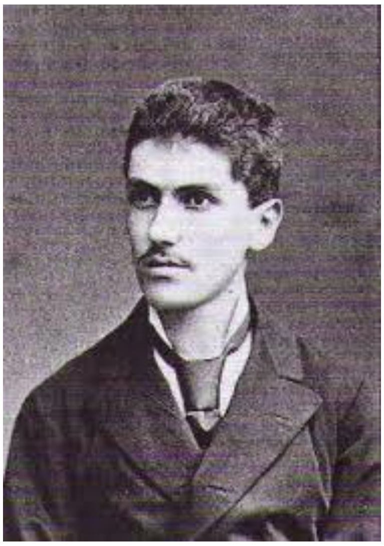
Достроить данную фигуру до прямоугольника. Площадь искомой фигуры будет равна разности площадей построенного прямоугольника и площади оставшихся частей.

Задача 4. Найти площадь фигуры АВСД.



Решение: $S_п - S_1 - S_2 - S_3 - S_4 = 3\cdot6 - \frac{4\cdot1}{2} - \frac{2\cdot2}{2} - \frac{4\cdot1}{2} - \frac{2\cdot2}{2} = 18 - 2 - 2 - 2 - 2 = 10$ кв.ед

Ответ: 10



1.2. Формула Пика

Георг Александр Пик
(10. 09. 1859 – 13. 07. 1942)

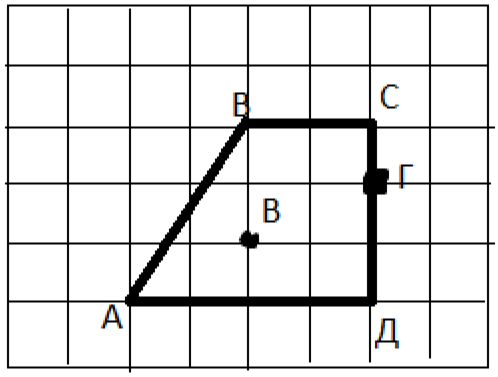
Георг Александр Пик – австрийский математик. Родился Георг Пик в еврейской семье. Его отец Адольф Йозеф Пик возглавлял частный институт. До одиннадцати лет Георг получал образование дома (с ним занимался отец), а затем поступил сразу в четвёртый класс гимназии. В шестнадцать лет Пик сдал выпускные экзамены и поступил в университет в Вене. Уже в следующем году Пик опубликовал свою первую работу по математике. После окончания университета в 1879 году он получил право преподавать математику и физику. В 1880 году Пик защитил докторскую диссертацию, а в 1881 году получил место ассистента на кафедре физики Пражского университета. В 1888 году он был назначен экстраординарным профессором математики, затем в 1892 году в Немецком университете в Праге был назначен ординарным профессором (полным профессором).

Круг математических интересов Пика был чрезвычайно широк. В частности, им написаны работы в области функционального анализа и дифференциальной геометрии, эллиптических и абелевых функций, теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа, всего более 50 тем. Широкую известность получила открытая им в 1899 году теорема Пика для расчёта площади многоугольника. Эта теорема оставалась незамеченной в течение некоторого времени, однако в 1949 году польский математик Гуго Штейнгауз включил теорему в свой знаменитый «Математический калейдоскоп». С этого времени теорема Пика стала широко известна.

Теорема привлекла довольно большое внимание и начала вызывать восхищение своей простотой и элегантностью. В Германии эта теорема включена в школьные учебники.

13 июля 1942 года Пик был депортирован в созданный нацистами в северной Чехии лагерь Терезиенштадт, где умер две недели спустя в возрасте 82 лет.

Нахождение площади многоугольника по формуле Пика



Узел – пересечение двух прямых

В – внутренний узел

Г - граничный узел

$$\boxed{\mathbf{S=B+\frac{\Gamma}{2}-1}}$$

Пример:

В=5
Г=10
S=5+ $\frac{10}{2}$ – 1=9

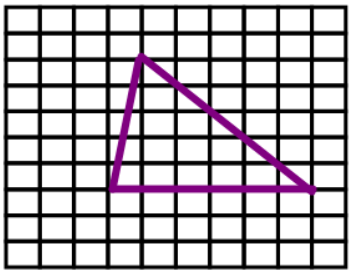
Ответ: 9

2.Практическая часть

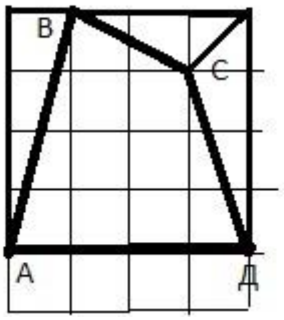
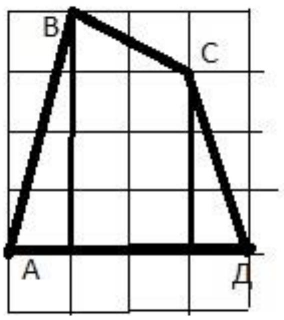
2.1. Исследование площадей многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге

Задача 4.

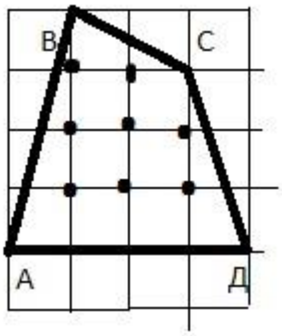
1) *На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см x 1 см изображен треугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах*		
Рисунок	По формуле геометрии	По формуле Пика

	$S=\frac{1}{2}ah$ a=6; h=5. $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15$ см^2	$S=B+\frac{Г}{2}-1$ Г=12, В=10 . $S=10+\frac{12}{2}-1=15$см^2

Задача 5

<table>
<tr><td colspan="2">1) На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см х 1 см изображен четырёхугольник ABCD. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти площадь многоугольника АВСД можно несколькими способами.</td></tr>
<tr><td>Рисунок</td><td>Достроением</td></tr>
<tr><td></td><td>$S_{АВСД}=S_{кв}-S_{тр}-S_{тр}-S_{тр}=16-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=10,5$</td></tr>
<tr><td>Рисунок</td><td>Разбиением</td></tr>
<tr><td></td><td>$S_{АВСД}=S_{тр}+S_{тр}+S_{трап}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3+\frac{2+3}{2}\cdot 3=$

$=10,5$</td></tr>
<tr><td>Рисунок</td><td>По формуле Пика</td></tr>
</table>

	$S_{ABCД}=В+\frac{Г}{2}-1=8+\frac{7}{2}-1=10{,}5$

Ответ во всех случаях один и тот же.

Заключение

В процессе исследования я изучил справочную, научно-популярную литературу. Узнал, что задача на нахождение площади многоугольника с вершинами в узлах сетки сподвигла австрийского математика Пика в 1899 году доказать замечательную формулу Пика.

В результате моей работы я расширил свои знания о решении задач на клетчатой бумаге, определил для себя классификацию исследуемых задач.

Я научился вычислять площади многоугольников, изображенных на клетчатом листке разными способами. Площадь фигуры, вычисляемая по формуле Пика, равна площади фигуры вычисляемая другими способами. Все рассмотренные способы интересны, но самый рациональный – вычисление по формуле Пика. Такой способ нахождения площадей многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге, буду использовать на ГИА для решения задач.

Список литературы:

1) Жарковская Н.М., Рисс Е.С. Геометрия на клетчатой бумаге. Формула Пика//математика, 2009, №17 – с.24-25.

2) Смирнова И., Смирнов В., Геометрия на клетчатой бумаге – М: Чистые пруды, 2007.

3) Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л.Н., Наглядная геометрия- М.: Дрофа, 2000.

4) Образовательный портал «Решу ЕГЭ» https://sdamgia.ru

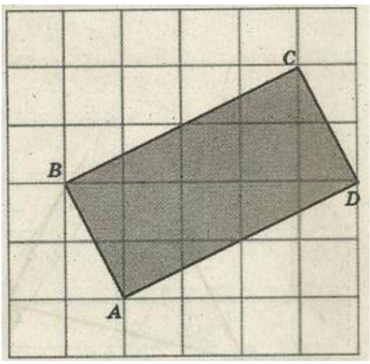
ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение1

Задачи на нахождение площади многоугольника на клетчатой бумаге по формуле Пика.

Задача 1.

Найдите площадь прямоугольника ABCD (рис.1).



Решение. По формуле Пика: $S = В + \frac{Г}{2} - 1$.

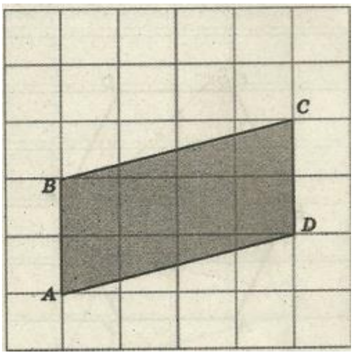
$В = 8, \quad Г = 6$

$S = 8 + \frac{6}{2} - 1 = 10$ (см²)

Ответ: 10 см².

Рис. 1

Задача 2. Найдите площадь параллелограмма ABCD (рис.2)



Решение. По формуле Пика: $S = В + \frac{Г}{2} - 1$.

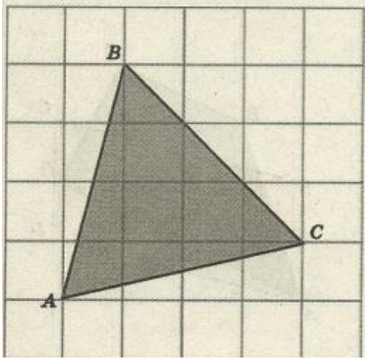
$В = 6, \quad Г = 6$

$S = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$ (см²)

Ответ: 8 см².

Рис. 2

Задача 3. Найдите площадь треугольника ABC (рис.3)



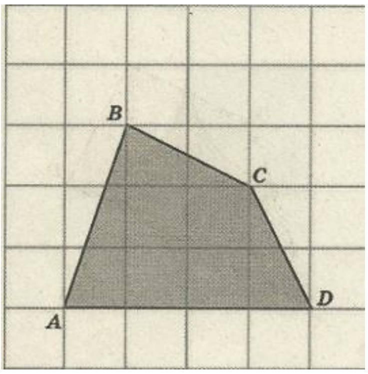
Решение. По формуле Пика: $S = В + \frac{Г}{2} - 1$.

$В = 6, \quad Г = 5$

$S = 6 + \frac{5}{2} - 1 = 7{,}5$ (см²). Ответ: 7,5 см².

Рис. 3

Задача 4. Найдите площадь четырёхугольника ABCD (рис. 4)



Решение. По формуле Пика: $S = В + \frac{Г}{2} - 1$.

В = 5, Г = 7

$S = 5 + \frac{7}{2} - 1 = 7{,}5$ (см²)

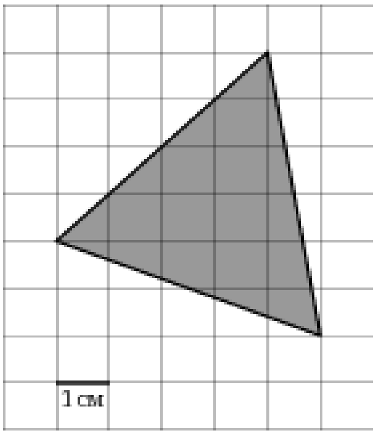
Ответ: 7,5 см².

Рис. 4

Приложение2

Задания из КИМов ОГЭ по математике.

Задача 1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (рис. 6). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



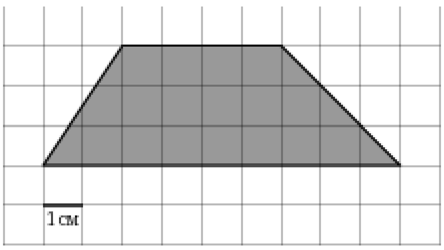
Решение. По формуле Пика: $S = В + \frac{Г}{2} - 1$.

В = 12, Г = 6

$S = 12 + \frac{6}{2} - 1 = 14$ (см²). Ответ: 14

Рис. 6

Задача 2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (рис. 7). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



Решение. Воспользуемся формулой Пика:

В = 12, Г = 17

$S = 12 + \frac{17}{2} - 1 = 19{,}5$ (см²)

Ответ: 19,5

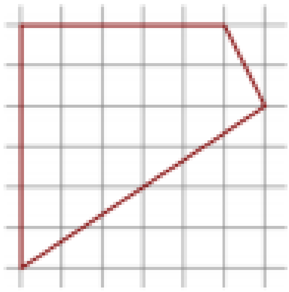
Рис. 7

Приложение 3.

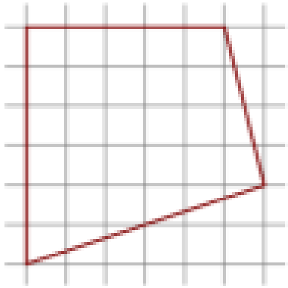
Задачи – рисунки, для которых применима формула Пика. Сайт «Решу ОГЭ».

Найти площади многоугольников.

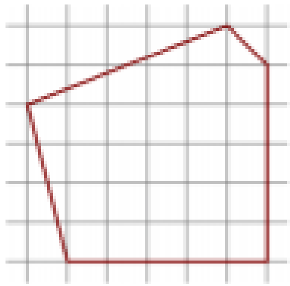
1)



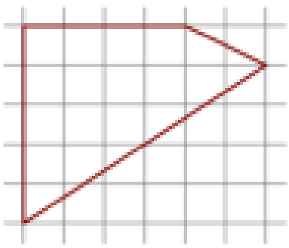
3)



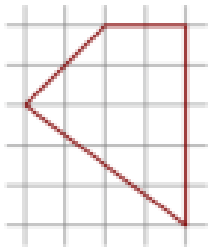
5)



2)



4)



6)